ТЕОРИЯ ФОРМЫ ЛИНИИ РАДИОЧАСТОТНОГО РАЗМЕРНОГО ЭФФЕКТА В МЕТАЛЛАХ*

Э. А. КАНЕР

Институт радиопизики и электроники, Академии Наук
Украинской ССР, СССР

(Получили 17 Марш 1967)

АННОТАЦИЯ

Развита теория формы линии радиочастотного размерного эффекта при дрейфовом движении электронов из окрестности опорной точки вглубь металла. Рассмотрение проведено с учетом диффузного рассеяния электронов на поверхности образца. Установлено хорошее согласие теории и эксперимента. Совпадение вычисленной и измеренной формы линий подтверждает выводы теории аномального скин-эффекта о характере распределения электромагнитного поля в скин-слое.

1. В последнее время для исследования поверхностей Ферми и длины свободного пробега электронов в металлах широко используются радиочастотные размерные эффекты. Сущность этих эффектов заключается в том, что поверхностный импеданс плоско-параллельной пластины во внешнем магнитном поле обнаруживает особенности типа узких линий.

Все известные радиочастотные размерные эффекты можно отнести к двум различным группам. К первой группе принадлежит геометрический размерный эффект, обусловленный отсеканием электронных траекторий. Отсекание электронов наблюдается всякий раз, когда экстремальный диаметр траектории D_{ext} становится равным толщине пластины. Этот эффект был впервые предсказан автором [1] при теоретическом исследовании циклотронного резонанса в пластине. Впоследствии он был обнаружен экспериментально как на высоких [2], так и на низких [3] частотах. В работе [4] построена теория формы линии радиочастотного размерного эффекта геометрического типа.

Вторая группа размерных эффектов обусловлена аномальным проникновением (AlI) электромагнитного поля в металл траекторного типа [5, 6]. Природа AlI поля в этом случае существенно иная, чем при резонансном возбуждении коллективных, слабо затухающих электромагнитных колебаний [7]. AlI поля траекторного типа связано с движением отдельных групп эффективных электронов. Эффективными являются такие электроны, которые в скин-слое движутся параллельно поверхности. Эти электроны создают узкие всплески (листки) тока и поля, медленно затухающие вглубь металла. В плоско-параллельной пластине возникают линии размерного эффекта, когда всплеск оказывается на второй стороне пластины.

* Результаты этой работы доложены на X Международной конференции по физике низких температур (Москва, 1966 г.).

АП поля траекторного типа обязано различным механизмам отбора эффективных электронов. Одним из них является механизм "цепочки траекторий". Электроны на экстремальном сечении поверхности Ферми совершают финитное движение в пространстве и создают всплеск тока на глубине, равной их диаметру D_0 . Для электронов, находящихся в глубине металла, этот всплеск является своеобразным скин-слоем, который служит для образования следующего всплеска на глубине $2D_0$ и т.д.. Этот механизм АП поля в металл исследован теоретически в работах [8 - 10]. "Цепочка траекторий" впервые обнаружена экспериментально Гантмахером при изучении размерного эффекта в [11].

Другой механизм отбора электронов и возникновения всплесков связан с фокусировкой эффективных электронов при дрейфовом движении вглубь металла в наклонном магнитном поле. Этот механизм АП впервые был предложен в работе [12]. В [12] было показано, что всплески расположены на расстояниях, кратных u_{ext} , где u_{ext} — экстремальное значение нормальной проекции среднего смещения электронов за период движения в магнитном поле. Экстремум величины u обязательно достигается в опорной точке поверхности Ферми, в которой скорость электронов параллельна магнитному полю. Электроны в окрестности опорной точки движутся по сильно вытянутым спиральным траекториям (Рис. 1). Всплески находятся там, где скорость электронов параллельна поверхности пластины. В

Рис. 1.

Траектории электронов в наклонном магнитном поле.

случае сложной Ферми-поверхности возможны и другие экстремумы среднего смещения u . Радиочастотный размерный-эффект от опорных точек обнаружен в олове [12], индии [13, 14], кадмии [15], калии [16]. Всплески поля, возникающие в металле за счёт электронов опорной точки, приводят к интересным особенностям циклотронного резонанса в наклонном магнитном поле [10, 17].

Очевидно, что форма линий размерного эффекта непосредственно отражает характер распределения электромагнитного поля в скин-слое. Исследование этого распределения представляет важную задачу физики металлов. До открытия размерных эффектов не существовало прямого способа определения закона убывания поля в металле и проверки теории аномального скин-эффекта.

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию формы линий размерного эффекта, обусловленного дрейфовым движением электронов вблизи опорной точки. Сравнение с экспериментальными результатами Гантмахера и Крылова [13, 14] показывает хорошее согласие теории и эксперимента.

2. Обычно в опытах по обнаружению и исследованию радиочастотного размерного эффекта в металлах образец помещают внутри катушки колебательного контура и измеряют вещественную или мнимую часть глубины проникновения δ_H переменного магнитного поля H_{ω} в зависимости от внешнего постоянного магнитного поля H .

$$\delta_H = \frac{1}{H_{\sim}(0)} \int_0^d dz H_{\sim}(z). \quad (1)$$

Здесь d – толщина образца, z – координата вдоль нормали к поверхности. Часто непосредственно измеряют не саму величину δ_H , а её производную $\partial\delta_H/\partial H$ по магнитному полю.

При двухстороннем возбуждении пластины скин-слои имеются с обеих сторон и измеряемая глубина проникновения δ_H в два раза больше толщины δ каждого из скин-слоёв.

$$\delta_H = 2\delta, \quad \delta = \frac{1}{H_{\sim}^{(1)}(0)} \int_0^d dz H_{\sim}^{(1)}(z), \quad (2)$$

где $H_{\sim}^{(1)}(z)$ – та часть переменного магнитного поля внутри металла, которая обусловлена возбуждением пластины с одной стороны. Используя уравнение Максвелла

$$\text{Rot } \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}^{(1)}, \quad (3)$$

выражение для δ_H можно представить в форме:

$$\delta_H = -2 \frac{E(0) - E(d)}{E'(0)}, \quad (4)$$

где $E(d)$ – электрическое поле на второй стороне пластины, обусловленное АП радиоволны в металл; $E'(0) \equiv dE(0)/dz$.

В случае АП поля от электронов опорной точки амплитуда прошедшей волны мала по сравнению с полем в исходном скин-слое. Поэтому эффектами многократного отражения и интерференции волн в пластине можно пренебречь. При этом распределение поля в пластине совпадает с распределением поля в полубесконечном металле. Это распределение должно быть найдено из уравнения Максвелла

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} + \frac{4\pi i\omega}{c^2} j(z) = 0, \quad (5)$$

где $E(z)$ и $j(z)$ – y -компоненты поля и плотности тока в металле. Ось y параллельна проекции вектора $\mathbf{H}$ на поверхность $z = 0$. Мы можем ограничиться только одним уравнением (5), поскольку размерный эффект от опорной точки имеет место при сравнительно малых углах наклона φ вектора $\mathbf{H}$ относительно поверхности [12].

Плотность тока определяется неравновесной частью f электронной функции распределения.

$$\mathbf{j} = -\frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathbf{v}_y f d^3p, \quad (6)$$

где $\mathbf{v}$ – скорость, $\mathbf{p}$ – импульс, e – абсолютная величина заряда электрона, $2\pi\hbar$ – постоянная Планка.

Функция f удовлетворяет кинетическому уравнению, которое мы запишем в приближении времени

релаксации:

$$-i\omega f + v_{\pm} \frac{\partial f}{\partial \pm} + \Omega \frac{\partial f}{\partial \tau} + \nu f = eE(\pm) v_y \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}. \quad (7)$$

Здесь $f_0(\epsilon)$ – равновесная фермиевская функция распределения, $\partial f_0 / \partial \epsilon = -\delta(\epsilon - \epsilon_F)$, ϵ_F – энергия

Ферми, $\Omega = eH/mc$ – циклотронная частота, $m = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial S(\epsilon_F, p_H)}{\partial \epsilon}$ – циклотронная масса,

$S(\epsilon, p_H)$ – площадь сечения изоэнергетической поверхности плоскостью $p_H \equiv \mathbf{pH}/H = \text{const.}$, τ – безразмерное время (фаза) движения электрона по орбите в магнитном поле, ν – частота столкновений электронов с рассеивателями. Возможность введения времени релаксации $1/\nu$ при аномальном скин-эффекте обоснована в работе [19].

Уравнение (7) необходимо дополнить граничным условием. Будем считать рассеяние электронов диффузным, т.е.

$$f|_{\substack{\pm=0 \\ \nu_{\pm}>0}} = 0. \quad (8)$$

Решение уравнения (7) с условием (8), согласно [18], имеет вид:

$$f(\pm, \tau, \epsilon, p_H) = \frac{e}{\Omega(\epsilon, p_H)} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \int_{r(\pm, \tau, \epsilon, p_H)}^{\tau} d\tau' v_y(\tau', \epsilon, p_H) \exp[\gamma(\tau' - \tau)] \cdot \\ \cdot E\left(\pm + \frac{1}{\Omega(\epsilon, p_H)} \int_{\mp}^{\tau'} d\tau'' v_{\pm}(\tau'', \epsilon, p_H)\right), \quad (9)$$

где

$$\gamma = \nu/\Omega \ll 1. \quad (10)$$

Мы пренебрегли частотой внешнего поля ω по сравнению с ν . Функция $r(\pm, \tau, \epsilon, p_H)$ означает момент "времени" τ , когда электрон последний раз столкнулся с поверхностью металла – перед тем, как он попал в точку фазового пространства $\pm, \tau, \epsilon, p_H$. Эта функция определяется как ближайший, предшествующий τ корень уравнения

$$\pm\Omega + \int_{\mp}^{\tau} v_{\pm}(\tau') d\tau' = 0 \quad (11)$$

Если это уравнение не имеет решений, то функцию r в формуле (9) следует положить равной $-\infty$.

Когда магнитное направлено под углом к поверхности металла, найти явное выражение для функции r не удастся даже в простейшем случае сферической поверхности Ферми. Однако из дальнейшего изложения ясно, что для рассматриваемого нами эффекта отличие проекции скорости $v_{\pm}$ от среднего значения не очень существенно. Поэтому при решении уравнения (11) и в граничном условии (8) мы заменим $v_{\pm}$ на среднее значение

$$\bar{v}_{\pm} = \frac{1}{2\pi} \oint d\tau v_{\pm}(\tau)$$

После этого легко найти приближенное выражение для функции r :

$$r = \begin{cases} -\infty, & (\bar{v}_* < 0) \\ \tau - \frac{\Omega z}{v_*}, & (\bar{v}_* > 0). \end{cases} \quad (12)$$

Подставляя (9) в (6), получим

$$j(z) = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\epsilon=\epsilon_F} \frac{m dp_H}{\Omega} \oint d\tau v_y(\tau) \int_{r(z,\tau)}^{\tau} d\tau' v_y(\tau') \exp[\gamma(\tau' - \tau)] \cdot \\ \cdot E\left(z + \frac{1}{\Omega} \int_{\tau}^{\tau'} d\tau'' v_*(\tau'')\right). \quad (13)$$

В (6) мы перешли от интегрирования по d^3p к интегралу по $d\tau d\epsilon dp_H$. Якобиан перехода равен m .

Упростим выражение (13), используя условие аномальности скин-эффекта. Так как толщина скин-слоя мала по сравнению с характерным значением v_*/Ω , интегралы по τ и τ' можно вычислить методом перевала. Точки перевала есть решения уравнения:

$$v_*(\tau_\alpha) = 0. \quad (14)$$

В этих точках скорость электрона параллельна поверхности металла (эффективные электроны). Применяя метод перевала в интеграле по τ , получим

$$j(z) = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{m dp_H}{\Omega} \sum_{\tau_\alpha} v_y(\tau_\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{r(z,\tau_\alpha)}^{\tau_\alpha} d\tau' v_y(\tau') \exp[\gamma(\tau' - \tau_\alpha)] \cdot \\ \cdot E\left(z + \frac{1}{\Omega} \int_{\tau_\alpha}^{\tau'} v_*(\tau'') d\tau'' - \frac{v_*'(\tau_\alpha)}{2\Omega} x^2\right). \quad (15)$$

Суммирование происходит по всем τ_α в интервале от 0 до 2π . В интеграле по τ' одна точка перевала совпадает с верхним пределом, а все остальные — лежат внутри интервала интегрирования. В соответствии с этим запишем (15) в следующем виде:

$$j(z) = j_0(z) + \Delta j(z), \quad (16)$$

где $j_0(z)$ представляет собой вклад от точки перевала $\tau' = \tau_\alpha$, а $\Delta j(z)$ — сумму всех остальных слагаемых. Напишем вначале выражение для $j_0(z)$:

$$j_0(z) = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{m dp_H}{\Omega} \frac{1}{2} \sum_{\tau_\alpha} v_y^2(\tau_\alpha) \iint_{-\infty}^{\infty} dx dy E\left(z + \frac{v_*'(\tau_\alpha)}{2\Omega} (y^2 - x^2)\right). \quad (17)$$

Множитель $1/2$ возник вследствие того, что интеграл по $y = \tau' - \tau_\alpha$ берется от $-\infty$ до $+\infty$. Из (17) следует, что двойной интеграл по x, y зависит только от $|v_*'(\tau_\alpha)|$. После очевидной замены переменных формулу (17) представим в форме:

$$j_0(\mathbf{z}) = A_y \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta E\left(\mathbf{z} + \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)\right), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} A_y &= \frac{e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int dp_H \pi \sum_{\tau_\alpha} v_y^2(\tau_\alpha) / |v'_y(\tau_\alpha)| = \\ &= \frac{e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p v_y^2 \delta(v_z) \delta(\epsilon - \epsilon_F). \end{aligned} \quad (19)$$

Переходя к интегрированию по сферическому изображению поверхности Ферми, получим

$$A_y = \frac{e^2}{(2\pi\hbar)^3} \oint_{\vartheta=\pi/2} \frac{d\lambda \cos^2 \lambda}{K(\lambda)} \quad (20)$$

где λ – азимутальный угол в пространстве скоростей ($v_z = v(\vartheta, \lambda) \cos \vartheta$, $v_y = v(\vartheta, \lambda) \sin \vartheta \cos \lambda$), ϑ – полярный угол, полярная ось параллельна $\mathbf{z}$, K – абсолютное значение гауссовой кривизны поверхности Ферми.

Все остальные точки перевала $\tau' = \tau_\beta < \tau_\alpha$ дают вклад в $\Delta j(\mathbf{z})$. Для $\bar{v}_z < 0$ число таких точек бесконечно. Благодаря этому сумма подобных слагаемых даёт малую добавку к $j_0(\mathbf{z})$, плавно зависящую от $\mathbf{z}$. Особенность в распределении тока $\Delta j(\mathbf{z})$ возникает вследствие того, что число точек перевала для $\bar{v}_z > 0$ конечно и зависит от $\mathbf{z}$. Когда величина $\mathbf{z}/u$ проходит через целочисленное значение, число точек перевала меняется на единицу. Величина

$$u = 2\pi\bar{v}_z/\Omega \quad (21)$$

– среднее смещение электрона за период $2\pi/\Omega$ вдоль оси $\mathbf{z}$. Оставляя только это особое слагаемое, запишем $\Delta j(\mathbf{z})$ в виде

$$\begin{aligned} \Delta j(\mathbf{z}) &= \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\bar{v}_z > 0} \frac{\pi dp_H}{\Omega} \theta(\mathbf{z} - nu) \sum_{\tau_\alpha} \frac{v_y^2(\tau_\alpha)}{|v'_y(\tau_\alpha)|} \exp(-2\pi\gamma \frac{\mathbf{z}}{u}) \cdot \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta E\left(\mathbf{z} - nu + \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)\right), \end{aligned} \quad (22)$$

где $\theta(x) = 1$ для $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ для $x < 0$, $n = [\mathbf{z}/u]$ – целая часть $\mathbf{z}/u$.

Перейдём от интегрирования по p_H к интегралу по λ и учтём, что основную роль в интеграле по λ играет небольшая окрестность опорной точки $\lambda = 0$, где функция u имеет максимум. Тогда

$$\Delta j(\mathbf{z}) = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{\exp(-\mathbf{z}/l_0 \sin \varphi)}{K_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda d\xi d\eta \theta(\mathbf{z} - nu_0 - \frac{1}{2} nu_0'' \lambda^2) \cdot \quad (23)$$

$$\cdot E\left(\pm - nu_0 - \frac{1}{2} nu_0'' \lambda^2 + \frac{1}{2}(\xi^2 \pm \eta^2)\right),$$

где $l_0 = 2\pi u_0/\gamma \sin \varphi$.

Характерная ширина области интегрирования по λ порядка $(\delta/nu_0)^{1/2} \ll 1$. Этот малый параметр определяет также относительную величину $\Delta j(\pm)$ по сравнению с $j_0(\pm)$. Из формулы (23) следует, что $\Delta j(\pm)$ представляет собой почти периодическую функцию $\pm$ с периодом u_0 , экспоненциально убывающую на расстоянии $l_0 \sin \varphi$, где l_0 — длина свободного пробега электрона в опорной точке.

Благодаря малости добавки $\Delta j(\pm)$ по сравнению с $j_0(\pm)$ уравнение (5) можно решать по теории возмущений. Для этого формально продолжим функции $E(\pm)$, $j_0(\pm)$ и $\Delta j(\pm)$ чётным образом на область $\pm < 0$ и перейдём к преобразованию Фурье. Уравнение (5) для компонент Фурье имеет вид:

$$\kappa^2 E(\kappa) + 2E'(0) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \left(\sigma_0(\kappa) E(\kappa) + \Delta j(\kappa) \right), \quad (24)$$

где

$$E(\kappa) = 2 \int_0^\infty d\pm E(\pm) \cos \kappa \pm, \quad E(\pm) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\kappa \cos \kappa \pm E(\kappa), \quad (25)$$

$$\sigma_0(\kappa) = 2\pi A_y / |\kappa|.$$

Введём функцию

$$T(\pm) \equiv - \frac{\pi}{2} \frac{E(\pm)}{E'(0)} \equiv T_0(\pm) + \Delta T(\pm). \quad (26)$$

Функция нулевого приближения

$$T_0(\pm) = \int_0^\infty \frac{d\kappa \cos \kappa \pm}{\kappa^2 - 4\pi i \omega c^{-2} \sigma_0(\kappa)} \equiv \delta_0 \int_0^\infty \frac{dq q \cos(q \pm / \delta_0)}{q^3 - i} \quad (27)$$

описывает распределение поля в скин-слое вблизи поверхности металла и совпадает с распределением поля при $H = 0$ [4]. Характерная толщина скин-слоя δ_0 определяется формулой:

$$\delta_0 = \left(c^2 / 8\pi^2 \omega A_y \right)^{1/3}. \quad (28)$$

На Рис. 2. приведены графики $\text{Re } T_0(\pm)$ и $\text{Im } T_0(\pm)$. Видно, что поле нулевого приближения заметно отличается от нуля на расстояниях $3 - 4 \delta_0$ от поверхности.

На больших расстояниях поле в металле описывается функцией

$$\Delta T(\pm) = - \frac{2\pi i \omega}{c^2 E'(0)} \int_0^\infty \frac{d\kappa \Delta j(\kappa) \cos \kappa \pm}{\kappa^2 - 4\pi i \omega c^{-2} \sigma_0(\kappa)} \quad (29)$$

Рис. 2.

Зависимость вещественной и мнимой частей функции $T_0(z)$ от z/δ_0 .

Выразим $\Delta j(\kappa)$ через $\Delta j(z)$ с помощью (25) и подставим в $\Delta j(z)$ нулевое приближение для поля. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta T(z) = & \frac{4i\omega}{c^2} \int_0^\infty d\zeta \left[T_0(z - \zeta) + T_0(z + \zeta) \right] \frac{2e^2 \exp(-\zeta/l_0 \sin \varphi)}{(2\pi\hbar)^3 K_0} \cdot \\ & \cdot \int_{-\infty}^\infty d\lambda \theta(\zeta - nu_0 - \frac{1}{2} nu_0'' \lambda^2) \int_{-\infty}^\infty d\xi d\eta T_0(\zeta - nu_0 - \\ & - \frac{1}{2} nu_0'' \lambda^2 + \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)). \end{aligned} \quad (30)$$

В этом выражении можно пренебречь слагаемым $T_0(z + \zeta)$, а нижний предел в интеграле по ζ заменить на $-\infty$. Кроме того, благодаря наличию резкого максимума у функции $T_0(z - \zeta)$ при $\zeta \simeq z$ величину $n = [\zeta/u_0]$ можно заменить на $[z/u_0]$. После подстановки в (30) выражения (27) для $T_0(z \equiv \zeta)$ и вычисления интегралов получаем

$$\Delta T(z) = - \left(\frac{8\delta_0^3}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(-z/l_0 \sin \varphi) \propto \Psi_1 \left(\frac{z - nu_0}{\delta_0} \right), \quad (31)$$

где безразмерная постоянная α имеет вид:

$$1/\alpha = \left| \frac{u_0}{u_0''} \right|^{1/2} \frac{\pi}{K_0 \int d\lambda \cos^2 \lambda K^{-1}} \quad (32)$$

Для сферической поверхности Ферми $\alpha = 1$.

Функция

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) = & \frac{1}{2i} \int_0^\infty \frac{dq q^{1/2}}{(q^3 - i)^2} \cos(qx + \frac{\pi}{4}) + \\ & + \frac{1}{2i} \int_0^\infty \frac{dq q^{1/2} \sin(qx + \frac{\pi}{4})}{(q^3 - i)(q^6 + 1)} \left[\frac{2q^3 \ln q}{\pi} + \frac{2q}{\sqrt{27}} (q^4 - 1) + \right. \\ & \left. + \frac{iq}{3} (2q^2 + q + 2) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Если не учитывать граничного условия (8) и использовать выражение для функции распределения в безграничном металле, то в формуле (9) $r = -\infty$ для всех v_z . При этом в выражении (23) для $\Delta j(z)$ отсутствует θ -функция, а распределение поля в металле описывается формулой (31), в которой $\Psi_1(x)$ заменяется функцией

$$\Psi_2(x) = \frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{dq q^{1/2} \cos(qx + \frac{\pi}{4})}{(q^3 - i)^2}. \quad (34)$$

На Рис. 3 и 4 приведены графики зависимости вещественной и мнимой части функций $\Psi_{1,2}(\frac{z - nu_0}{\delta_0})$ и их производных с учётом граничного условия (кривые 1) и без учета границы (кривые 2), полученные численным интегрированием. Из этих кривых следует, что столкновения электронов с поверхностью металла существенно уменьшает поле на левом краю всплеска при $z < nu_0$ и практически не меняет его вид при $z > nu_0$. Другими словами, диффузное рассеяние электронов приводит к своеобразному "отсеканию" левого края всплеска. Это объясняет известный экспериментальный факт [13, 16] что за начало линии при измерении производной импеданса следует считать её левый край, а не положение максимума. Кроме того, видно, что вещественная и мнимая части функций $\Psi_{1,2}$ (или $\Psi_{1,2}'$) изменяются таким образом, что положение экстремума одной из них совпадает с положением наиболее резкого изменения другой.

Характерная пространственная ширина всплесков поля внутри металла порядка 6 – 8 δ_0 и примерно в два раза больше ширины функции $T_0(z)$.

Обсудим критерии применимости теории и условия возникновения всплесков [12]. Ясно, что всплески будут узкими лишь тогда, когда расстояние между соседними линиями значительно больше δ_0 , т.е.

$$\delta_0/\rho \ll \sin \varphi, \quad (35)$$

где ρ – смещение электрона в опорной точке за период $2\pi/\Omega$ вдоль вектора $\mathbf{H}$. Существует ограничение

со стороны больших углов наклона, связанное с тем, что при больших φ электроны из окрестности опорной точки (с $\lambda \ll (\delta_0/\nu u_0)^{1/2}$) не являются эффективными и для них неприменим метод перевала.

Рис. 3.

Зависимость вещественной и мнимой частей функций Ψ_1 (кривые 1) и Ψ_2 (кривые 2) от $z - \nu u_0 / \delta_0$.

Достаточный критерий того, что в окрестности опорной точки существуют эффективные электроны с $\nu_* = 0$, имеет вид

$$\varphi < \psi, \quad (36)$$

где ψ – характерные угловые размеры окрестности опорной точки, определяющие разброс дрейфовой скорости. Угол ψ может быть найден из условия, что пространственная дефокусировка электронов за время свободного пробега $1/\nu$ порядка δ_0 , т.е.

$$\frac{\Omega}{2\pi\nu} |u(\psi) - u_0| \approx \delta_0.$$

Отсюда

$$\psi \sim (\delta_0 / l_0 \sin \varphi)^{1/2}$$

и неравенство (36) принимает вид*

$$\sin \varphi < \left(\delta_0 / l_0 \right)^{1/3}. \quad (37)$$

Необходимо отметить, что построенная выше теория АП поля в металл полностью применима не только к случаю опорной точки. Полученные выше формулы правильно описывают распределение поля

Рис. 4.

Зависимость вещественной и мнимой частей производных Ψ_1' (кривые 1) и Ψ_2' от $z - nu_0 / \delta_0$.

в металле при фокусировке других групп эффективных электронов с экстремальным смещением u_{ext} . При этом токовые листки существуют при любых углах наклона [12, 15] магнитного поля относительно поверхности металла.

* Более точное рассмотрение, в которое мы здесь не будем вдаваться (подробности см. в [6]), показывает, что необходимым критерием служит неравенство $\sin \varphi < (\delta_0 \rho^2 / l_0^3)^{1/3}$. Обычно в эксперименте оба условия практически совпадают.

3. Для сравнения развитой выше теории с экспериментальными данными, необходимо установить связь между распределением поля в полупространстве и поверхностным импедансом плоско-параллельной пластины. Поверхностный импеданс $Z = R - iX$ связан с глубиной проникновения 2δ соотношением

$$R - iX = - \frac{4\pi i\omega}{c^2} 2\delta. \quad (38)$$

Используя формулы (2), (4) и (26), получим

$$R - iX = \frac{16i\omega}{c^2} [T(d) - T(0)]. \quad (39)$$

Как было указано в предыдущем разделе, обычно измеряется производная импеданса по магнитному полю. С помощью формулы (31) находим

$$\frac{dR}{dH} = \frac{16\alpha\omega}{c^2} \left(\frac{8\delta_0 d}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\exp(-d/l_0 \sin \varphi)}{H} \operatorname{Im} \Psi_1' \left(\frac{d - nu_0}{\delta_0} \right). \quad (40)$$

$$\frac{dX}{dH} = \frac{16\alpha\omega}{c^2} \left(\frac{8\delta_0 d}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\exp(-d/l_0 \sin \varphi)}{H} \operatorname{Re} \Psi_1' \left(\frac{d - nu_0}{\delta_0} \right). \quad (41)$$

$$n = [d/u_0].$$

Из этих формул следует, что амплитуда линий размерного эффекта при измерении производной dZ/dH должна убывать как $1/H$. Положение n -й линии в шкале поля пропорционально номеру:

$$H_n = n H_1. \quad (42)$$

где H_1 — то значение магнитного поля, при котором $d = u_0$. Измеряя положение линий, можно найти величину $u_0 = \rho \sin \varphi$ и, следовательно, гауссову кривизну в опорной точке ($\rho = cK_0^{-1/2}/eH$). Исследование угловой зависимости амплитуды линий позволяет определить длину свободного пробега l_0 электронов в опорной точке. Наконец, из сравнения вычисленной и измеренной формы линии можно определить глубину скин-слоя δ_0 и проверить теорию аномального скин-эффекта.

На Рис. 5. показана зависимость производной dR/dH от магнитного поля, полученная Гантмахером и Крыловым [13] в индии. Условия эксперимента следующие: $T = 1.3^\circ\text{K}$, угол наклона $\varphi \sim 7^\circ$, магнитное поле H параллельно оси [111], вектор E || [111], нормаль к поверхности (ось z) параллельна [001], частота $\omega/2\pi = 3$ МГц, толщина пластины 0,3 мм. На этом рисунке отчетливо видна периодичность линий размерного эффекта. Их убывание с номером подчиняется закону $1/n$ — в соответствии с формулой (40).

На Рис. 6. показаны результаты сравнения экспериментальной и теоретически вычисленной формы линий для $n = 1$. Так как масштаб экспериментальных кривых по оси ординат является произвольным, мы подбирали масштаб на теоретических кривых так, чтобы обеспечить наилучшее совпадение на правом крыле линий. Указанный на оси ординат масштаб относится к $-\operatorname{Im} \Psi_1'$ и $-\operatorname{Re} \Psi_1'$ соответственно. Видно, что имеет место хорошее совпадение теоретических и экспериментальных кривых (согласие несколько хуже для dX/dH). Расхождение на левом крыле линий обусловлено, по-видимому, тем, что при вычислениях использовалось приближенное граничное условие (замена v_z на $\bar{v}_z$). Следует подчеркнуть, что вообще левое крыло линии крайне чувствительно к характеру отражения электронов от поверхности металла. Возможно, что это обстоятельство может быть использовано для

Рис. 5.

Зависимость производной импеданса dR/dH от магнитного поля в индии (получена Гантмахером и Крыловым [13]). Условия эксперимента приведены в тексте.

изучения характера рассеяния электронов на поверхности образца. Величина δ_0 , которая определяется по форме и ширине кривых, оказалась примерно равной $3 \cdot 10^{-4}$ см. Экспериментальное значение δ_0 , измеренное на высокой частоте и пересчитанное к частоте 3 Мгц даёт $\delta_0 \sim 2.3 \cdot 10^{-4}$ см. Изученная в работе [13] частотная зависимость ширины линий размерного эффекта $\Delta H \sim \delta_0 \sim \omega^{-1/3}$ согласуется с формулой (28). Наши расчёты полностью подтверждают вывод [13, 16] о том, что за начало линий следует считать её левый край, а не положение максимума. Подтверждается и тот факт [14, 16], что экстремум одной из функций dR/dH или dX/dH совпадает с областью резкого изменения другой. Однако необходимо подчеркнуть, что подобная связь между dR/dH и dX/dH (или R и X) в случае размерного эффекта имеет приближенный характер, а не является строгим следствием дисперсионных соотношений типа Крамерса - Кронига (см. также [4]).

Вывод теории об экспоненциальном возрастании амплитуды линий размерного эффекта при увеличении угла наклона φ был сделан ещё в первой работе Гантмахера и автора [12] при исследовании размерного эффекта на опорных точках в олове. В [12] был предложен метод измерения локального значения длины свободного пробега l_0 . В работе [13] с помощью этого метода измерена длина пробега l_0 и её зависимость от температуры в монокристаллах индия. Полученный в этой работе результат

$$1/l(T) = 1/l(0) + aT^3 \quad (43)$$

полностью подтверждает вывод теории аномального скин-эффекта [19, 20] о том, что при столкновениях

эффективных электронов с фононами основную роль в интеграле столкновений играет слагаемое с "уходом". Поэтому частота столкновений ν оказывается пропорциональной числу фононов, т.е. T^3 .

Рис. 6.

Сравнение теоретических и экспериментальных кривых по форме линий размерного эффекта.

———— эксперимент; - - - - - теория.

Таким образом, вся совокупность экспериментальных данных по размерному эффекту находится в превосходном согласии с теорией. Форма линий определяется по существу только характером распределения поля в металле (в формулу (30) входит лишь функция $T(\mathbf{r})$). Поэтому совпадение вычисленной и измеренной формы линии является непосредственным подтверждением теории аномального скин-эффекта в металлах.

Автор признателен В.Ф. Гантмахеру и И.П. Крылову за предоставление записей экспериментальных кривых.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э.А. Канер, ДАН СССР 119, 471 (1958).
2. М.С. Хайкии, ЖЭТФ 41, 1773 (1961); 43, 59 (1962).
3. В.Ф. Гантмахер, ЖЭТФ 42, 1416 (1962); 44, 811 (1963).
4. Э.А. Канер и В.Л. Фалько, ЖЭТФ 51, 586 (1966).

5. V.F. Gantmaher, *Prog. low Temp. Phys.* (1966).
6. Э.А. Канер и В.Ф. Гантмахер, *УФН* (в печати).
7. Э.А. Канер и В.Г. Скобов, *УФН* 89, 367 (1966).
8. М.Я. Азбель, *ЖЭТФ* 39, 400 (1960).
9. Э.А. Канер, *ЖЭТФ* 44, 1036 (1963).
10. E.A. Kaner and A.Ya. Blanc, *J. Physics Chem. Solids* 28, 1735 (1967).
11. В.Ф. Гантмахер, *ЖЭТФ* 43, 345 (1962).
12. В.Ф. Гантмахер и Э.А. Канер, *ЖЭТФ* 45, 1430 (1963).
13. И.П. Крылов и В.Ф. Гантмахер, *X Межд. конф. по физике низких темп.* (М., 1966); *ЖЭТФ* 51, 740 (1966).
14. И.П. Крылов, *ЖЭТФ Письма в редакцию* 1, 24 (1965).
15. А.А. Марьяхин и В.П. Набережных, *ЖЭТФ* (1966).
16. J.F. Koch and T.K. Wagner, *X Межд. конф. по физике низких температур* (М., 1966).
17. C.C. Grimes, A.F. Kip, F.W. Spong, R.A. Stradling and P. Pincus, *Phys. Rev. Lett.* 11, 455 (1963); F.W. Spong and A.F. Kip, *Phys. Rev.* 137, A431, (1965).
18. Э.А. Канер, *ЖЭТФ* 34, 658 (1958).
19. М.Я. Азбель и Э.А. Канер, *ЖЭТФ* 32, 896 (1957).
20. Э.А. Канер и М.Я. Азбель, *ЖЭТФ* 33, 1461 (1957).