К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В МЕТАЛЛАХ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Э.А. Канер и В.Г. Скобов

(Получили 1 Октября 1965)

Аннотация

В статье теоретически исследуется возможность распространения в металлах электромагнитных волн, длина которых мала по сравнению с диаметром электронных орбит в магнитном поле. Диссипативная проводимость, обусловленная черенковским поглощением волны электронами, осциллирует при изменении соотношения между длиной волны и диаметром орбиты электронов ("геометрический резонанс"). В минимумах этих осцилляций в металлах с односвязной поверхностью Ферми черенковское поглощение может обратиться в нуль. При этом недиссипативная высокочастотная проводимость оказывается больше диссипативной проводимости, обусловленной рассеянием электронов. Вследствие этого в металле могут распространяться электромагнитные волны с дискретным спектром волновых векторов и частот. Исследован спектр, затухание и поляризация этих волн. Показано, что их частоты могут быть как больше, так и меньше обратного времени релаксации электронов. При изменении магнитного поля поверхностный импеданс металла испытывает резонансные осцилляции, обусловленные совпадением собственных частот ω_n с частотой внешней волны ω .

1. Введение

Константинов и Перель [1] впервые обратили внимание на то, что при наличии сильного магнитного поля $\mathbf{H}$, перпендикулярного поверхности, радиоволна проникает вглубь металла. В этом случае волновой вектор $\mathbf{k}$ направлен вдоль $\mathbf{H}$ и связанное с пространственной дисперсией черенковское поглощение отсутствует вследствие симметрии (волна является поперечной, а поперечная проводимость обусловлена холловским дрейфом и не связана с диссипацией энергии). Поэтому в металлах с неравными концентрациями электронов и "дырок" могут распространяться спиральные электромагнитные волны с квадратичным спектром. Позднее Бухсбаум и Голт [2] показали, что в металлах с равными концентрациями носителей разного знака также вдоль $\mathbf{H}$ могут распространяться альвеновские волны, аналогичные существующим в разреженной плазме.

Авторами [3] был рассмотрен случай произвольной ориентации векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}$, когда имеется, вообще говоря, сильное черенковское поглощение волны электронами, движущимися с ней в фазе (затухание Ландау). Было показано, что вращение электронов не позволяет им двигаться строго в фазе с волной и сильно уменьшает затухание Ландау, если размеры электронных орбит малы по сравнению с длиной волны. Вследствие этого затухание спиральной волны, обусловленное черенковскими электронами, оказывается порядка отношения ларморова радиуса электрона R к длине волны и является малым в случае достаточно сильного магнитного поля ($kR \ll 1$).

Вопрос о возможности распространения в металлах электромагнитных возбуждений с длиной волны, значительно меньшей ларморова радиуса ($kR \gg 1$), является гораздо более сложным. Причина заключается в том, что в этой области длин волн весьма существенную роль играет пространственная дисперсия и связанное с ней затухание Ландау. Поэтому коротковолновые возбуждения в металлах, вообще говоря, не могут распространяться. Однако при некоторых условиях в $\mathbf{k}$ -пространстве появляются небольшие области, в которых затухание волн является малым. Это связано с тем, что затухание Ландау может испытывать резкие осцилляции в зависимости от соотношения между R и $1/k$. Физическая природа этих осцилляций по существу та же, что и в случае известного "геометрического резонанса" в поглощении ультразвука [4].

Затухание Ландау определяется электронами, для которых выполняются фазовые соотношения

$$k_z v_z - N\Omega = \omega \quad (N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.1)$$

Здесь ω – частота волны, $\Omega = eH/mc$ – циклотронная частота, e – величина заряда электрона, m – эффективная масса, c – скорость света, k_z и v_z – проекции волнового вектора и скорости электрона на направление магнитного поля $\mathbf{H}$ – ось z .

Вклад электронов с разными N в поглощение существенно зависит от соотношения между диаметром их орбиты и длиной волны. Это объясняется следующим. Электрон наиболее эффективно взаимодействует с электромагнитным полем на тех участках своей орбиты, на которых он движется вдоль плоскостей равной фазы волны. В случае замкнутой выпуклой орбиты электрона на ней имеется два таких участка (в окрестности точек A и B , см. рис. 1). При движении же электрона между этими участками на него действует быстро осциллирующее поле волны, которое в среднем не изменяет его энергию. Поэтому поглощаемая электроном энергия зависит от разности фаз поля волны в точках A и B ,

Фиг. 1.

в которых электрон движется в противоположные стороны. Если на диаметре орбиты укладывается нечетное число полуволн, то поле волны действует на электрон одинаково на обоих участках орбиты и поглощение является большим. Если же на диаметре укладывается четное число полуволн, то действие поля волны на этих участках оказывается противоположным, а поглощение – очень малым.

В случае $k_z \gg 1/R$ условие (1.1) удовлетворяется для многих N ($N \sim k_z R \gg 1$). Поэтому среди разных групп электронов всегда найдутся такие, вклад которых в поглощение будет большим. Следствием этого является относительно малая амплитуда осцилляций (порядка обратного квадратного корня из числа таких групп). Если же величина $k_z R$ мала, то условие (1.1) выполняется только для одного значения $N = 0$. В этом случае осцилляции "геометрического резонанса" велики [5], причем минимальное значение затухания обратно пропорционально длине свободного пробега электрона. В [3] было показано, что при определенных условиях минимальное значение диссипативного тока становится настолько малым, что основную роль начинает играть недиссипативный "холловский" ток.

В результате этого оказывается возможным распространение электромагнитных волн с дискретным спектром частот и волновых векторов.

В [3] рассматривался случай низких частот $\omega \ll \nu$ (ν – частота столкновений электрона с рассеивателями). Область же высоких частот $\omega \gg \nu$ не была исследована. Между тем, при $\omega \gg \nu$ в металле возникают новые электромагнитные волны, обладающие малым затуханием. Изложению результатов этих исследований и посвящена настоящая статья.

2. Постановка задачи

Распространение плоской монохроматической волны в безграничном металле описывается уравнениями Максвелла

$$k^2 E_i - k_i k_j E_j = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{H}) E_j \quad (2.1)$$

где $\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{H})$ – фурье-компоненты тензора проводимости с учетом пространственной и временной дисперсии, а также зависимости от постоянного магнитного поля $\mathbf{H}$; по дважды встречающимся векторным индексам подразумевается суммирование от 1 до 3. Током смещения мы пренебрегли, благодаря чему из (2.1) следует условие электрической квазинейтральности металла:

$$k_i \sigma_{ij} E_j = 0 \quad (2.2)$$

Выберем систему координат $x y z$ так, чтобы ось z была параллельна постоянному магнитному полю $\mathbf{H}$, а ось x – ортогональна векторам $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}$. В дальнейшем нам потребуется еще система координат $x \eta \zeta$, в которой ось ζ параллельна волновому вектору $\mathbf{k}$. Кроме того, будем считать, что угол между осями y и ζ равен $\pi - \varphi$, где

$$\varphi \ll 1$$

и, следовательно,

$$k_x = 0, \quad k_y \approx -k, \quad k_z = k \varphi \quad (2.3)$$

Общее выражение для элементов тензора проводимости, полученное в [3] с помощью кинетического уравнения, запишем в случае изотропного закона дисперсии электронов $\epsilon(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m$:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{H}) = \frac{3}{4\pi} \frac{n_0 e^2}{m \Omega v^2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\tau v_i(\theta, \tau). \quad (2.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\tau} d\tau' v_j(\theta, \tau') \exp \left[\frac{\nu - i\omega}{\Omega} (\tau' - \tau) + \frac{i\mathbf{k}}{\Omega} \int_{\tau}^{\tau'} \mathbf{v}(\theta, \tau'') d\tau'' \right].$$

Здесь n_0 – концентрация электронов; v – скорость на поверхности Ферми $p^2/2m = \mu$; τ и θ – азимутальный и полярный углы в пространстве скоростей. Проекции скорости электрона $\mathbf{v}$ равны

$$\begin{aligned} v_x(\theta, \tau) &= v \sin \theta \cos \tau, & v_y(\theta, \tau) &= v \sin \theta \sin \tau, \\ v_z(\theta) &= v \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Спектр, затухание и поляризация волн определяются из однородной системы (2.1). Условие равенства нулю ее детерминанта удобно записать, используя соотношение (2.2). Выразим из (2.2) продольную компоненту поля E_ζ через E_x и E_η

$$E_\zeta = -\frac{1}{\sigma_{\zeta\zeta}} (\sigma_{\zeta x} E_x + \sigma_{\zeta\eta} E_\eta). \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.1), представим уравнения для поперечных компонент в виде

$$E_\alpha = \frac{4\pi i \omega}{k^2 c^2} \left(\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\sigma_{\alpha\zeta} \sigma_{\zeta\beta}}{\sigma_{\zeta\zeta}} \right) E_\beta, \quad (\alpha, \beta = x, \eta) \quad (2.7)$$

где индекс суммирования β пробегает значения x и η . Следовательно, поперечные компоненты поля определяются "перенормированным" тензором

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\sigma_{\alpha\zeta} \sigma_{\zeta\beta}}{\sigma_{\zeta\zeta}} \quad (2.8)$$

В дальнейшем всюду латинские индексы i, j принимают значения от 1 до 3, а греческие α, β — от 1 до 2. Условие равенства нулю детерминанта системы (2.7) имеет вид:

$$\left(\frac{k^2 c^2}{4\pi\omega} \right)^2 - \left(\tilde{\sigma}_{xx} \tilde{\sigma}_{\eta\eta} - \tilde{\sigma}_{x\eta} \tilde{\sigma}_{\eta x} \right) - i \frac{k^2 c^2}{4\pi\omega} \left(\tilde{\sigma}_{xx} + \tilde{\sigma}_{\eta\eta} \right) = 0. \quad (2.9)$$

3. Асимптотическое поведение тензора проводимости

Для определения свойств электромагнитных волн в случае больших kR необходимо найти асимптотическое выражение для тензора проводимости $\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{H})$. Как было отмечено выше, мы считаем угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}$ близким к $\pi/2$, так что $k_z R \ll 1$. Вместе с тем будем предполагать, что пространственная неоднородность высокочастотного поля вдоль $\mathbf{H}$ является сильной. Другими словами, нас интересует асимптотическое поведение тензора σ_{ij} при выполнении следующих условий

$$|\nu - i\omega| \ll k_z \nu \ll \Omega \ll k\nu. \quad (3.1)$$

Вычисления удобно произвести в системе координат $x\eta\zeta$. В элементах тензора σ_{ij} (2.4), в которых встречается индекс ζ , проинтегрируем по τ или τ' по частям. Например, элемент

$$\sigma_{x\zeta} = \frac{3n_0 e^2}{4\pi m \Omega \nu^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \nu_x(\theta, \tau) u_\zeta(\theta, \tau) d\tau, \quad (3.2)$$

где

$$u_\zeta = \frac{\Omega}{ik} \int_{-\infty}^\tau d\tau' \exp \left[\frac{\nu - i\omega}{\Omega} (\tau' - \tau) \right] \frac{d}{d\tau'} \exp \left[\frac{ik}{\Omega} \int_\tau^\tau \nu_\zeta(\theta, \tau'') d\tau'' \right] \quad (3.3)$$

Интегрируя в (3.3) по частям, получаем

$$u_{\zeta} = \frac{\Omega}{ik} + \frac{\omega + i\nu}{k} \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \exp \left[\frac{\nu - i\omega}{\Omega} (\tau' - \tau) + \frac{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(\theta, \tau'')}{\Omega} \int_{\tau}^{\tau'} d\tau'' \right] \quad (3.4)$$

При подстановке (3.4) в (3.2) член с Ω/ik тождественно обращается в нуль. Второе слагаемое в (3.4) можно преобразовать к виду

$$\frac{(\omega + i\nu)/k}{1 - \exp \left[-\frac{2\pi}{\Omega} (\nu - i\omega + ik_z v_z) \right]} \int_{\tau-2\pi}^{\tau} d\tau' \exp \left[\int_{\tau}^{\tau'} \frac{\nu - i\omega + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(\theta, \tau'')}{\Omega} d\tau'' \right]. \quad (3.5)$$

Используя теперь неравенства (3.1) и пренебрегая членами порядка $(\nu - i\omega + ik_z v_z)/\Omega$ и φ^2 , запишем выражение (3.5) в форме

$$\frac{\omega + i\nu}{k} J_0(kR \sin \theta) \frac{\Omega \exp(-ikR \sin \theta \cos \tau)}{\nu - i\omega + ik_z v \cos \theta}, \quad (3.6)$$

где J_0 – функция Бесселя нулевого порядка. Подставляя (3.6) в (3.2) и беря интеграл по τ , находим

$$\sigma_{x\zeta} = \frac{3}{2} \frac{n_0 e^2}{m} \frac{\nu - i\omega}{kv} \int_0^{\pi} \frac{J_0(kR \sin \theta) J_1(kR \sin \theta) \sin^2 \theta d\theta}{\nu - i\omega + ik_z v \cos \theta} \quad (3.7)$$

Аналогичным путем можно преобразовать и остальные элементы тензора σ_{ij} . В результате выражение для тензора проводимости приобретает вид (в системе координат $x\eta\zeta$):

$$\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{H}) = \frac{3}{2} \frac{n_0 e^2}{m} \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{\nu - i\omega + ik_z v \cos \theta} \times \begin{bmatrix} J_1^2(x) \sin^2 \theta; & -iJ_0(x)J_1(x) \sin \theta \cos \theta; & J_0(x)J_1(x) \frac{\nu - i\omega}{kv} \sin \theta \\ iJ_0(x)J_1(x) \sin \theta \cos \theta; & J_0^2(x) \cos^2 \theta; & iJ_0^2(x) \frac{\nu - i\omega}{kv} \cos \theta \\ -J_0(x)J_1(x) \frac{\nu - i\omega}{kv} \sin \theta; & iJ_0^2(x) \frac{\nu - i\omega}{kv} \cos \theta; & \left(\frac{\nu - i\omega + ik_z v \cos \theta}{kv} \right)^2 - J_0^2(x) \left(\frac{\nu - i\omega}{kv} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

где $x = kR \sin \theta$. Заметим, что вследствие малости угла θ оси η и z , ζ и y в (3.8) можно не различать.

Для дальнейшего упрощения (3.8) воспользуемся асимптотическим видом бесселевых функций при больших значениях аргумента

$$J_n(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2}\right) \quad (3.9)$$

$x \gg 1$

Подставим (3.9) в (3.8) и выполним интегрирование по θ . После довольно длительных вычислений (см. Приложение) асимптотическое выражение σ_{ij} может быть представлено в форме

$$\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{H}) = \frac{3}{2} \frac{n_0 e^2}{m k_z v k R} \times \left[\begin{array}{lll} 1 - F; & \frac{1}{\sqrt{\pi k R}} \cos\left(2kR - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{v - i\omega}{k_z v} G; & - \frac{v - i\omega}{k v} G \\ - \frac{1}{\sqrt{\pi k R}} \cos\left(2kR - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{v - i\omega}{k_z v} G; & \frac{v - i\omega}{k_z v}; & \frac{v - i\omega}{k v} \\ \frac{v - i\omega}{k v} G; & \frac{v - i\omega}{k v}; & 2k_z R \frac{v - i\omega}{k v} \end{array} \right] \quad (3.10)$$

где

$$F = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \sin\left(2kR - \frac{\pi}{4} + x^2\right) \exp\left(-2x \sqrt{kR} \frac{v - i\omega}{k_z v}\right), \quad (3.11)$$

$$G = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \cos\left(2kR - \frac{\pi}{4} + x^2\right) \exp\left(-2x \sqrt{kR} \frac{v - i\omega}{k_z v}\right). \quad (3.12)$$

В формуле (3.10) мы пренебрегли малыми слагаемыми порядка $(kR)^{-1/2}$ и $(v - i\omega)/k_z v$.

Из (3.10) следует, что величина продольной составляющей электрического поля E_ζ значительно больше поперечных составляющих E_x и E_η :

$$E_\zeta \approx -E_y = -\frac{1}{2k_z R} (GE_x + E_z). \quad (3.13)$$

Однако несмотря на относительно большую величину E_ζ , "перенормировка" (2.8) двумерного тензора $\sigma_{\alpha\beta}$ не играет существенной роли. Причина этого состоит в том, что элементы $\sigma_{\alpha\zeta}$ ($\alpha = x, \eta$) весьма малы и

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} \approx \sigma_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = x, \eta). \quad (3.14)$$

Из выражений (3.11), (3.12) следует, что асимптотическое поведение элементов $\sigma_{\alpha\beta}$ определяется величиной параметра

$$w = \sqrt{kR} \frac{v - i\omega}{k_z v}. \quad (3.15)$$

В случае

$$|w| \ll 1 \quad (3.16)$$

имеем

$$\sigma_{xx} = \frac{3n_0 e^2}{2mk_z v kR} \left[1 - \sin 2kR + \frac{2}{\sqrt{\pi}} w \cos \left(2kR - \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (3.17)$$

$$\sigma_{xz} = -\sigma_{zx} = \frac{3n_0 e^2}{2mk_z v} \frac{\pi}{(\pi kR)^{3/2}} \left[\cos \left(2kR - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{\pi} w \cos 2kR \right]. \quad (3.18)$$

Вещественная часть диагонального элемента σ_{xx} ответственна за диссипацию энергии волны. Она является резко осциллирующей функцией kR , принимая минимальные значения при

$$kR = \alpha_n \equiv (n + 1/4)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

Эти осцилляции $\text{Re } \sigma_{xx}$ обусловлены тем, что основную роль в поглощении играют электроны, движущиеся в фазе с волной. Продольная скорость этих электронов

$$v_z \approx |\omega + i\nu| / k_z, \quad (3.20)$$

а разброс диаметров их орбит

$$\delta D \approx 2R \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\delta v_z^2}{v^2}} \right) \approx R \frac{\delta v_z^2}{v^2}. \quad (3.21)$$

Условие (3.16) является достаточным для того, чтобы разброс диаметров этих эффективных электронов был мал по сравнению с длиной электромагнитной волны, т.к.

$$k\delta D \approx |w|^2 \quad (3.22)$$

Поэтому в случае (3.16) все эффективные электроны находятся в одинаковых условиях относительно волны. Наиболее существенное взаимодействие электронов с волной происходит на тех участках траекторий, где они движутся вдоль плоскостей равной фазы волны A и B (см. рис. 1). Разность фаз волны между точками A и B определяется величиной $2kR$. Поэтому величина σ_{xx} резко осциллирует при изменении kR .

В обратном предельном случае

$$|w| \gg 1 \quad (3.23)$$

имеется большой разброс диаметров орбит эффективных электронов на длине волны и вследствие усреднения их вкладов амплитуда осцилляций σ_{xx} и σ_{zz} сильно уменьшается

$$\sigma_{xx} = \frac{3n_0 e^2}{2mk_z v kR} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi} w} \sin\left(2kR - \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (3.24)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{3n_0 e^2}{2mk_z v} \frac{\pi}{(\pi kR)^{3/2}} \frac{\sin(2kR - \pi/4)}{2w^2}. \quad (3.25)$$

При этом величина недиагонального элемента σ_{xz} оказывается много меньше, чем σ_{xx} и σ_{zz} .

4. Низкочастотные волны с дискретным спектром

Рассмотрим сначала распространение электромагнитных волн в предельном случае низких частот

$$\omega \ll \nu. \quad (4.1)$$

Асимптотические выражения для элементов тензора проводимости, полученные в предыдущем параграфе, справедливы при произвольном соотношении между ω и ν . Наибольший интерес представляет рассмотрение случая (3.16). Сравним минимальное значение σ_{xx} с величиной σ_{xz} . При $kR = \alpha_n$

$$\left[\frac{\sigma_{xx}^{\min}}{\sigma_{xz}} \right] = \frac{2\nu}{\varphi\Omega} \quad (4.2)$$

Если это отношение является малым, т.е. угол φ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\nu}{\Omega} \ll \varphi \ll \frac{1}{kR}, \quad (4.3)$$

то недиссипативная "холловская" проводимость σ_{xz} оказывается значительно больше диссипативных членов $\sigma_{xx}^{\min}$ и σ_{zz} . Другими словами, для значений волнового вектора

$$k_n = \frac{\alpha_n}{R} \quad (4.4)$$

эффективная диэлектрическая проницаемость электронного газа становится больше диссипативной

проводимости. Поэтому в металле оказывается возможным распространение слабо затухающих электромагнитных волн с дискретным спектром [3]. Допустимые значения волнового числа k_n определяются соотношением (4.4). Подобное "квантование" в сугубо классических условиях $\hbar\Omega \ll T$ обусловлено тем, что для значений $k = k_n$ исчезает большое затухание Ландау. Спектр соответствующих частот ω_n должен быть найден из общего дисперсионного уравнения (2.9), в котором волновое число k надо заменить на k_n . Пренебрегая в (2.9) малыми слагаемыми с $\sigma_{xx}^{\min}$ и σ_{zz} , получаем

$$\omega_n = \frac{k_n^2 c^2}{4\pi |\sigma_{xz}(k_n)|} \equiv \frac{2}{3} \sqrt{2\pi} \frac{v_A^2}{v^2} \alpha_n^{9/2} \varphi \Omega, \quad (4.5)$$

где

$$v_A = \frac{c\Omega}{\omega_0} = \frac{H}{\sqrt{4\pi n_0 m}}. \quad (4.6)$$

Затухание волны (4.5) обусловлено диссипативной проводимостью σ_{xx} . Из уравнения (2.9) находим относительный декремент затухания*

$$\begin{aligned} \Gamma_n(k) &= -\frac{\operatorname{Im} \omega}{\omega_n} = \frac{\sigma_{xx}(k)}{2 |\sigma_{xz}(k_n)|} \\ &= \frac{v}{\varphi \Omega} + \sqrt{2\pi \alpha_n} \sin^2(kR - \alpha_n). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Затухание минимально при $kR = \alpha_n$ и резко возрастает при увеличении $|kR - \alpha_n|$. Ширина области в k -пространстве, в которой существует слабо затухающая волна (4.5), определяется из условия

$$\Gamma_n(k) \ll 1 \quad (4.8)$$

или

$$(kR - \alpha_n)^2 \ll (2\pi \alpha_n)^{-1/2}. \quad (4.9)$$

Выясним теперь характер поляризации электрического поля в волне. Подставляя в уравнение Максвелла

$$k^2 c^2 E_x = 4\pi i \omega \sigma_{xz} E_z \quad (4.10)$$

спектр частот и волновых векторов (4.5) и (4.4), получаем

$$E_x \simeq i E_z. \quad (4.11)$$

Следовательно, так же как и в спиральных волнах при $kR \ll 1$ [3], поперечная часть электрического поля волны (4.5) поляризована по кругу. Величина продольного поля E_y должна быть найдена из соотношения (3.13). Так как в случае (3.16) величина G мала, то

$$E_y = E_z / 2\varphi \alpha_n. \quad (4.12)$$

* Пользуемся случаем исправить ошибку, допущенную в [3] при определении затухания волны (4.5). Вместо приведенного в [3] затухания $\Gamma = \operatorname{Re} \sigma_{zz} / 2 |\sigma_{xz}|$ следует использовать формулу (4.7).

Используя спектр волны (4.5), условия ее существования (3.1), (4.1) и (4.3) можно записать в виде

$$\frac{\nu}{\Omega} \ll \varphi \ll \frac{1}{\alpha_n} \ll 1, \quad (4.13)$$

$$\omega_n \ll \nu. \quad (4.14)$$

При нарушении неравенства $\nu \ll \varphi \Omega$ даже минимальное значение относительного затухания Γ_n становится больше или порядка единицы и волна быстро затухает. Для обычных металлов ($n \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $m \sim 10^{-2.7}$) условия (4.13) выполняются в полях $H \gtrsim 10^{30} \text{ е}$, при углах φ порядка градуса и при длине свободного пробега ν/ν порядка нескольких миллиметров.

5. Высокочастотные волны с дискретным и непрерывным спектром

В области высоких частот

$$\omega \gg \nu \quad (5.1)$$

имеется больше различных слабо затухающих волн, чем в случае $\omega \ll \nu$. Так же, как и в случае низких частот, наиболее интересные эффекты имеют место при малых значениях параметра w (3.16), когда σ_{xx} и σ_{xz} являются осциллирующими функциями kR . При этом в минимумах осцилляций элемент σ_{xx} (3.17) имеет заметную мнимую часть, обусловленную мнимой частью w . Для нахождения спектра частот слабо затухающей волны с дискретным спектром волновых векторов $k_n = \alpha_n/R$ необходимо решить дисперсионное уравнение

$$\left(\frac{k_n^2 c^2}{4\pi\omega_n} \right)^2 - \sigma_{xz}^2(k_n) - i \frac{k_n^2 c^2}{4\pi\omega_n} \sigma_{xx}(k_n, \omega_n) = 0 \quad (5.2)$$

относительно ω_n . Используя формулы (3.17), (3.18) и пренебрегая малой вещественной частью w , получаем

$$\omega_n = \frac{2}{3} \sqrt{2\pi} \left(\frac{v_A}{v} \right)^2 \alpha_n^{9/2} \frac{\varphi \Omega}{\rho_n}, \quad (5.3)$$

где

$$\rho_n^2 = 1 + \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \left(\frac{v_A}{v} \right)^2 \alpha_n^{9/2}. \quad (5.4)$$

Чтобы найти затухание волны, в уравнении (5.2) нужно удержать вещественную часть σ_{xx} . Предполагая затухание малым, находим

$$\Gamma_n(k) = - \frac{\text{Im } \omega}{\omega_n} = \frac{1/2 \text{ Re } \sigma_{xx}}{[- \text{Im } \sigma_{xx}(k_n) + 4\pi\omega_n \sigma_{xz}(k_n)/k_n^2 c^2]} \quad (5.5)$$

или

$$\Gamma_n(k) = \frac{1}{\rho_n} \left[\frac{v}{\varphi \Omega} + \sqrt{2\pi\alpha_n} \sin^2(kR - \alpha_n) \right]. \quad (5.6)$$

Как и в случае низких частот, затухание имеет минимум при $kR = \alpha_n$ и быстро возрастает с увеличением $|kR - \alpha_n|$.

Поляризация поперечной части поля волны должна быть найдена из уравнения Максвелла

$$k_n^2 c^2 E_x = 4\pi i \omega_n \left[\sigma_{xx}(k_n, \omega_n) E_x + \sigma_{xz}(k_n) E_z \right]. \quad (5.7)$$

Если воспользоваться уравнением (5.2), то для поперечных компонент получается соотношение

$$E_x = i E_z \left[1 - \frac{4\pi i \omega_n}{k_n^2 c^2} \sigma_{xx}(k_n, \omega_n) \right]^{-1/2}, \quad (5.8)$$

из которого следует, что поперечная часть поля волны эллиптически поляризована:

$$E_x = i \rho_n E_z. \quad (5.9)$$

Величина продольной составляющей E_y определяется формулой (3.13), которая в данном случае дает

$$2\varphi \alpha_n E_y = \left[1 + \frac{4}{3} \left(\frac{v_A}{v} \right)^2 \alpha_n^4 \right] E_z. \quad (5.10)$$

Для существования волны необходимо выполнение условий (3.1), (3.16), (5.1) и условия $\Gamma \ll 1$. Используя спектр частот ω_n (5.3), наиболее жесткие из этих неравенств запишем в форме

$$\frac{v}{\Omega \rho_n} \ll \varphi \ll \frac{1}{\alpha_n} \ll 1, \quad (5.11)$$

$$\left(\frac{v_A}{v} \right)^2 \alpha_n^4 \ll \rho_n.$$

Рассмотрим изменение свойств волны (5.3) при изменении магнитного поля.

(а) В области слабых полей, где

$$\left(\frac{v_A}{v} \right)^2 \alpha_n^{9/2} \ll 1 \quad (5.12)$$

величина $\rho_n \rightarrow 1$. При этом формулы (5.3), (5.6), (5.9) и (5.10), определяющие спектр, затухание и поляризацию волны совпадают с формулами (4.5), (4.7), (4.11) и (4.12). Другими словами, в этом случае высокочастотная волна по своим свойствам полностью аналогична низкочастотной волне. Отличие заключается лишь в появлении дополнительного ограничения (5.12) на магнитное поле и величину α_n . Таким образом, существование волны с дискретным спектром (4.5) не зависит от соотношения между v и ω .

(б) В области более сильных полей, когда неравенство (5.12) заменяется на обратное и

$$\rho_n \gg 1, \quad (5.13)$$

имеем

$$\omega_n = \left(\frac{2\pi}{9} \right)^{1/4} \frac{v_A}{v} \alpha_n^{9/4} \varphi \Omega, \quad (5.14)$$

$$\Gamma(k) = \frac{1}{2\omega_n} \left[v + \varphi \Omega \sqrt{2\pi\alpha_n} \sin^2(kR - \alpha_n) \right], \quad (5.15)$$

$$E_y = \frac{\Omega}{3i\omega_n} \left(\frac{v_A}{v} \right)^2 \alpha_n^3 E_x, \quad E_z \ll E_x. \quad (5.16)$$

Поперечная часть поля в этой волне поляризована вдоль оси x . Ее спектр и затухание определяются только величиной σ_{xx} . Существование этой высокочастотной волны обусловлено тем, что при $kR = \alpha_n$ диссипативная проводимость сильно уменьшается и становится много меньше недиссипативной:

$$\operatorname{Re} \sigma_{xx}^{\text{min}} \ll -\operatorname{Im} \sigma_{xx}. \quad (5.17)$$

(в) В предельном случае высоких частот (5.1) вещественная часть элемента σ_{zz} (см. (3.10)) мала по сравнению с его мнимой частью, которая является отрицательной. Следовательно диэлектрическая проницаемость в направлении оси z

$$\epsilon_{zz} = \frac{4\pi i \sigma_{zz}}{\omega} = 6\pi \frac{n_0 e^2}{m(k_z v)^2 kR} \left(1 + i \frac{v}{\omega} \right) \quad (5.18)$$

в основном вещественна и положительна. Это обстоятельство должно привести к существованию слабо затухающей высокочастотной волны. Однако благодаря заметной недиагональной проводимости σ_{xz} существует, вообще говоря, довольно сильная связь между двумя поперечными волнами. Так как в случае $|v| \ll 1$ элемент σ_{xz} является резко осциллирующей функцией kR , то эта связь сильно ослабляется при

$$kR = \beta_N \equiv \left(N + \frac{3}{4} \right) \frac{\pi}{2} \quad (5.19)$$

$$N = 0, 1, 2, \dots$$

при этом в минимуме

$$\frac{(\sigma_{xz}^{\text{min}})^2}{\sigma_{xx} |\sigma_{zz}|} \sim \frac{|v - i\omega|}{k_z v} \ll 1 \quad (5.20)$$

и в кпавнении (2.9) можно пренебречь членом σ_{xz}^2 .

Таким образом, при $k = \beta_N/R$ связь между обеими волнами разрывается и дисперсионное уравнение (2.9) распадается на два уравнения. Одно из них определяет затухающую волну (при $k = k_N$ элемент σ_{xx} вещественен). Другое

$$k_N^2 c^2 = 4\pi i \omega \sigma_{zz}(k_N, \omega) \quad (5.21)$$

дает слабо затухающую волну с дискретным спектром

$$\omega_N = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \frac{v_A}{v} \beta_N^{5/2} \varphi \Omega, \quad k_N = \frac{\beta_N}{R}. \quad (5.22)$$

Относительное затухание этой волны

$$\Gamma(k) = -\frac{\text{Im } \omega}{\omega_N} = \frac{\text{Re } \sigma_{zz} + \sigma_{xz}^2 / \sigma_{xx}}{2 |\text{Im } \sigma_{zz}|} = \frac{1}{2\omega_N} \left[v + \frac{\varphi \Omega}{\pi} \frac{\sin^2 2(kR - \beta_N)}{1 - \sin 2\beta_N} \right]. \quad (5.23)$$

Ширина областей в k -пространстве, в которых волна (5.22) является слабо затухающей ($\Gamma \ll 1$), ограничена условием

$$(kR - \beta_N)^2 \ll \frac{\omega_N}{\varphi \Omega}. \quad (5.24)$$

Поляризация электрического поля в волне-линейная:

$$E_z = 2\varphi \beta_N E_y, \quad E_x \ll E_z. \quad (5.25)$$

Область существования этой волны с дискретным спектром определяется неравенствами (3.1), (5.1) и условием

$$\frac{(\sigma_{xz}^{\text{max}})^2}{\sigma_{xx} |\sigma_{zz}|} \gg 1. \quad (5.26)$$

Наиболее жесткие из этих условий могут быть представлены в виде

$$\frac{v}{\varphi \Omega} \ll \frac{v_A}{v} \beta_N^{5/2} \ll 1, \quad (5.27)$$

$$\varphi \ll \frac{1}{\beta_N} \ll 1.$$

(г) Наконец, если помимо (3.1) и (5.1) выполняется неравенство

$$\varphi \ll \frac{\omega}{\Omega}, \quad (5.28)$$

то степень связи волн оказывается слабой (неравенство (5.26) заменяется на обратное для всех значений kR , исключая малые окрестности точек $kR = \alpha_n$, в которых происходит уменьшение σ_{xx}). Уравнение (5.21) теперь становится справедливым при любых kR , и спектр волны из дискретного

превращается в непрерывный:

$$\omega(k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{v_A}{v} (kR)^{5/2} \Phi\Omega. \quad (5.29)$$

Для существования волны (5.29) должны выполняться условия (5.1), (5.28) и неравенства

$$1 \ll \left(\frac{v}{v_A}\right)^{2/5} \left(\frac{\Phi\Omega}{\omega}\right)^{3/5} \ll \frac{\Omega}{\omega}, \quad (5.30)$$

которые получаются из (3.1), если выразить k через ω с помощью (5.29).

Проведенный анализ возможностей распространения слабо затухающих электромагнитных волн основан на использовании выражений (3.10) для элементов тензора проводимости. Эти асимптотические формулы получены для односвязной сферической поверхности Ферми. Довольно очевидно, что характер асимптотического представления тензора σ_{ij} , в частности, вывод о наличии резких осцилляций элементов σ_{xx} и σ_{xz} сохранит силу и в случае несферической, но односвязной и выпуклой поверхности Ферми. Отличие состоит в том, что в (3.17)–(3.18) в аргументах осциллирующих функций вместо $2kR$ будет стоять kD , где D – диаметр центрального сечения поверхности Ферми вдоль направления $[\mathbf{kH}]$. Кроме того, связанный с затуханием Ландау диссипативный ток будет направлен вдоль скорости электрона $\partial \epsilon(\mathbf{p}) / \partial \mathbf{p}$ в точке $\mathbf{p} \cdot \mathbf{H} = 0$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$ на поверхности Ферми $\epsilon(\mathbf{p}) = \mu$.

Из изложенных во введении соображений вытекает, что в случае многосвязной или невыпуклой Ферми-поверхности амплитуда осцилляций проводимости будет относительно малой. Действительно, в этом случае имеется не одна, а несколько групп "эффективных" электронов, движущихся в фазе с волной и удовлетворяющих условию $k_z \bar{v}_z = \omega$. Поэтому σ_{xx} будет суммой выражений типа (3.17) для разных групп

$$\sigma_{xx} \sim \sum_j a_j (1 - \sin kD_j). \quad (5.31)$$

Эта величина ни при каких вещественных значениях волнового вектора $\mathbf{k}$ в нуль не обращается. Поэтому в случае многосвязной или невыпуклой поверхности Ферми волн с дискретным спектром нет. В металле может существовать лишь слабо затухающая волна с непрерывным спектром (5.29), если все диссипативные токи от разных групп "резонансных" электронов коллинеарны. Таким образом, предсказанные слабо затухающие волны с дискретным спектром можно наблюдать лишь в металлах с односвязной и выпуклой поверхностью Ферми. Этому требованию удовлетворяют щелочные металлы, а также некоторые другие, например, индий.

6. Возбуждение волн с дискретным спектром. Резонансный эффект

В этом разделе мы рассмотрим возбуждение волн с дискретным спектром частот и волновых векторов внешним электромагнитным полем. При падении внешней волны на поверхность металла имеет место скин-эффект. Резко неоднородное распределение высокочастотного поля в металле можно представить как суперпозицию монохроматических плоских волн с различными значениями k . Благодаря малой глубине скин-слоя среди этих монохроматических волн всегда найдутся такие, волновой вектор которых удовлетворяет условию $kR = \alpha_n$. Резонансное возбуждение собственных колебаний будет иметь место всякий раз, когда частота внешнего поля ω совпадает с одной из частот ω_n

собственных колебаний. При фиксированной частоте ω резонансное возбуждение волн с дискретным спектром происходит при тех значениях магнитного поля $H = H_n$, для которых $\omega_n(H) \doteq \omega$.

В качестве примера рассмотрим возбуждение волн со спектром (5.14), в которых поперечная часть электрического поля поляризована вдоль оси x . Для этих волн резонансные значения постоянного магнитного поля можно записать в виде

$$H_n = \left(\frac{9}{2\pi} \right)^{1/8} \alpha_n^{-9/8} \frac{\pi c}{e} \left(\frac{\omega \omega_0 v}{\phi c} \right)^{1/2} \quad (6.1)$$

Из (6.1) следует, что резонансный эффект периодичен в функции $H^{-8/9}$. При возбуждении волны со спектром (4.5) $H_n \sim \alpha_n^{-3/2}$. Таким образом, в отличие от всех других осцилляционных и резонансных явлений, этот резонанс не периодичен ни по прямому, ни по обратному полю.

Согласно [3], распределение высокочастотного поля $\mathcal{E}_x(\zeta)$ и поверхностный импеданс Z_{xx} определяются формулами:

$$\mathcal{E}_x(\zeta) = T_{xx}(\zeta) \mathcal{E}_x'(0), \quad (6.2)$$

$$Z_{xx} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} T_{xx}(0), \quad (6.3)$$

$$T_{xx} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk \cos k\zeta}{k^2 - 4\pi i \omega \sigma_{xx}(k) c^{-2}}, \quad (6.4)$$

где штрих означает производную по ζ . Мы пренебрегаем несущественным для дальнейшего влиянием рассеяния электронов на границе металла (см. [3]).

Найдем сначала поле $\mathcal{E}_x(\zeta)$ на больших расстояниях от поверхности металла $\zeta = 0$. Это поле характеризуется функцией

$$T_{xx}(\zeta) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk k^{5/2} \cos k\zeta}{k^{9/2} - (H_n/H)^4 k_n^{9/2} [1 + 2i\Gamma(k)]}, \quad (6.5)$$

где $k_n = \alpha_n/R$, а выражение для $\Gamma(k)$ определяется формулой (5.15), в которой нужно заменить ω_n на ω . Введем "расстройку" резонанса

$$\Delta = \frac{8}{9} \frac{H - H_n}{H_n} \quad (|\Delta| \ll 1) \quad (6.6)$$

и новую переменную интегрирования

$$\tau = \left(\frac{k}{k_n} \right)^{3/2}. \quad (6.7)$$

В области резонанса ($\Delta \rightarrow 0$) основной вклад в $T_{xx}(\zeta)$ вносит небольшая окрестность полюса подынтегральной функции, находящегося около точки $\tau = 1$ на плоскости комплексного переменного τ . Поэтому функцию $T_{xx}(\zeta)$ можно представить в форме

$$T_{xx}(\zeta) = -\frac{2}{\pi k_n} \int_0^\infty d\tau \frac{\tau^6 [\exp(ik_n \zeta \tau^2) + \exp(-ik_n \zeta \tau^2)]}{\tau^9 - \left[1 - \frac{9}{2} \Delta + \frac{9}{4} i \Gamma(\Delta)\right]}, \quad (6.8)$$

где

$$\Gamma(\Delta) = \frac{1}{2\omega} \left[\nu + (2\pi)^{1/2} \varphi \Omega \Delta^2 \right]. \quad (6.9)$$

В первом слагаемом в (6.8) повернем контур интегрирования к прямой $\arg \tau = \pi/4$, а во втором — к прямой $\arg \tau = -\pi/4$. В результате получим сумму вычетов и интегралы вдоль прямых $\arg \tau = \pm \pi/4$. При больших ζ основной вклад в $T_{xx}(\zeta)$ дает вычет первого интеграла в точке

$$\tau_0 = 1 - \frac{\Delta}{2} + \frac{i}{4} \Gamma(\Delta). \quad (6.10)$$

Таким образом, в окрестности резонанса $\Gamma(\Delta) \ll 1$ имеем

$$T_{xx}(\zeta) \simeq -\frac{4i}{9} \frac{R}{\alpha_n \left[1 - \Delta + \frac{i}{2} \Gamma(\Delta)\right]} \exp \left\{ i \alpha_n \frac{\zeta}{R} \left[1 - \Delta + \frac{i}{2} \Gamma(\Delta)\right] \right\} \quad (6.11)$$

и поле на больших расстояниях от поверхности металла представляет электромагнитную волну с длиной

$$\lambda_n = \frac{2\pi R}{\alpha_n (1 - \Delta)} \approx \frac{2\pi R_n}{\alpha_n} \left(1 - \frac{\Delta}{8}\right) \quad (6.12)$$

Далее из (6.3) и (6.5) при $\zeta = 0$ и $\Delta \rightarrow 0$ находим резонансные значения поверхностного импеданса

$$Z_{xx}^{(n)} = \frac{16\pi}{9} \frac{\omega R_n}{\alpha_n c^2} \left(1 - i \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{9}\right), \quad (6.13)$$

$$R_n = \frac{mc\nu}{eH_n}.$$

Величина $Z_{xx}^{(n)}$ слабо возрастает с увеличением n :

$$Z_{xx}^{(n)} \sim \alpha_n^{1/8}. \quad (6.14)$$

Это возрастание резонансных значений импеданса при уменьшении магнитного поля обусловлено увеличением длины волны (6.12) собственных электромагнитных колебаний. Ширина резонансного максимума определяется затуханием волны и по порядку величины совпадает с относительной шириной области k -пространства, в которой волна слабо затухает

$$\Delta_n = \frac{\Delta H}{H_n} \sim \left(\frac{\omega}{\varphi \Omega_n \sqrt{\alpha_n}} \right)^{1/2}. \quad (6.15)$$

Абсолютная ширина ΔH убывает с номером как $n^{-13/16}$.

Для сравнения рассмотрим поверхностный импеданс металла вдали от резонанса, когда $\Gamma(\Delta) \gg 1$.

В этом случае выражение для $T_{xx}(0)$ можно записать в виде

$$T_{xx}(0) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^2 dk}{k^4 - i\delta_{eff}^{-4}(1 - \sin 2kR)}, \quad (6.16)$$

где

$$\delta_{eff} = \left(\frac{2v^2 c^2 \varphi}{3\omega_0^2 \omega \Omega} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (6.17)$$

представляет собой эффективную глубину проникновения внешнего электромагнитного поля в металл. Величина $T_{xx}(0)$ была вычислена одним из авторов [6]. Согласно [6], при $\delta_{eff} \ll R$

$$Z_{xx}^{(нерез)} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \gamma \left(\frac{1}{4} \right) \frac{\omega \delta_{eff}}{c^2} \exp \left(\frac{3\pi i}{8} \right) \sim \omega^{\frac{1}{2}} H^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.18)$$

где $\gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера.

Таким образом, на плавную зависимость импеданса от магнитного поля (6.18) накладываются узкие резонансные максимумы, соответствующие резонансному возбуждению собственных колебаний со спектром (5.14). Отношение резонансного значения импеданса $Z_{xx}^{(n)}$ к нерезонансному (6.18)

$$\left| \frac{Z_{xx}^{(n)}}{Z_{xx}^{(нерез)}} \right| \approx \frac{R_n}{\alpha_n \delta_{eff}} \approx \left(\frac{\varphi \Omega_n}{\omega} \sqrt{\alpha_n} \right)^{\frac{1}{4}} > 1, \quad (6.19)$$

т.е. вдали от резонанса поверхностный импеданс оказывается в несколько раз меньше. На рис. 2

Фиг. 2.

схематически показана зависимость импеданса от обратного магнитного поля. Аналогичный характер имеет зависимость импеданса металла от H и при возбуждении других слабо затухающих электромагнитных волн с дискретным спектром.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Найдем асимптотический вид элементов $\sigma_{x\beta}$ ($\beta = x, \eta$) в предельном случае (3.1). Используя формулу (3.9), выражения (3.8) для этих элементов можно представить в форме

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma}{\pi} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin^2 \theta}{u + i \cos \theta} [1 - \sin(2\alpha \sin \theta)], \quad (\text{II.1})$$

$$\sigma_{x\eta} = \frac{\sigma}{\pi} \int_0^\pi d\theta \frac{i \cos \theta \sin \theta}{u + i \cos \theta} \cos(2\alpha \sin \theta), \quad (\text{II.2})$$

где

$$\sigma = \frac{3n_0 e^2}{2mk_z v k R}, \quad (\text{II.3})$$

$$\alpha = kR, \quad u = (v - i\omega)/k_z v, \quad (\text{II.4})$$

причем

$$|u| \ll 1 \ll \alpha. \quad (\text{II.5})$$

Введем новую переменную интегрирования $\mu = \cos \theta$ и запишем (II.1) и (II.2) в виде

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma}{\pi} \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2)^{1/2}}{u + i\mu} - \sigma F, \quad (\text{II.6})$$

$$\sigma_{x\eta} = \frac{\sigma}{\pi} \int_{-1}^1 d\mu \cos [2\alpha(1 - \mu^2)^{1/2}] - \sigma u G, \quad (\text{II.7})$$

где

$$F = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2)^{1/2}}{u + i\mu} \sin [2\alpha(1 - \mu^2)^{1/2}], \quad (\text{II.8})$$

$$G = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 d\mu \frac{\cos [2\alpha(1 - \mu^2)^{1/2}]}{u + i\mu} \quad (\text{II.9})$$

Первое слагаемое в (II.6) с точностью до малых членов порядка u равно. Выражение для первого члена в (II.7) может быть найдено с помощью метода стационарной фазы. Его главный член при $\alpha \gg 1$ имеет вид

$$(\pi\alpha)^{-\frac{1}{2}} \cos(2\alpha - \pi/4). \quad (\text{П. 10})$$

Найдем теперь асимптотические формулы для функций F и G . Благодаря неравенствам (П.5) основной вклад в F и G вносит область малых значений μ . По этой причине все плавные функции μ можно разложить в ряд по степеням μ , а пределы интегрирования считать бесконечными. После замены переменных

$$\mu = \tau\alpha^{-\frac{1}{2}}$$

формулы для F и G можно записать в виде

$$V \equiv G + iF = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{w + i\tau} \exp i(2\alpha - \tau^2), \quad (\text{П. 11})$$

$$w = u\alpha^{\frac{1}{2}}, \quad F = \text{Im } V, \quad G = \text{Re } V, \quad (\text{П. 12})$$

при взятии вещественной и мнимой части в (П.12) параметр w нужно считать вещественным. Полос в подынтегральной функции в (П.11) находится в точке $\tau_0 = iw$, при этом $\text{Re } \tau_0$ и $\text{Im } \tau_0$ — положительны. Поэтому контур интегрирования в (П.11) можно совместить с прямой $\arg \tau = -\pi/4$. После замены $\tau = t \cdot \exp(-\pi i/4)$ (П.11) приведем к форме

$$V = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t + w \exp(-\pi i/4)} \exp(2i\alpha - t^2) \quad (\text{П. 13})$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty + we^{-\pi i/4}}^{\infty + we^{-\pi i/4}} \frac{dz}{z} \exp \left[2i\alpha - (z - we^{-\pi i/4})^2 \right],$$

причем $\text{Im } w \exp(-\pi i/4) < 0$.

В (П.13) сместим контур интегрирования в плоскости комплексного переменного z на вещественную ось. Интеграл по малой полуокружности вокруг точки $z = 0$ равен вычету подынтегральной функции, а интеграл по вещественной оси нужно брать в смысле главного значения:

$$V = \exp i(2\alpha + w^2) \left\{ 1 + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} \exp(-x^2 + 2xwe^{-\pi i/4}) \right\}. \quad (\text{П. 14})$$

Интеграл в фигурных скобках в (П.14) с помощью дифференцирования по параметру w и последующего интегрирования легко приводится к интегралу вероятности. В итоге получаем

$$V = \exp(2i\alpha - \pi i/4) \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} dx \exp(ix^2 - 2wx). \quad (\text{П. 15})$$

Из (П.15) видно, что в предельном случае

$$|w| \ll 1 \quad V = \exp(2i\alpha) \left[1 - \frac{2w}{\pi^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) + O(w^2) \right]. \quad (\text{П. 16})$$

В обратном случае

$$|w| \gg 1 \quad V = \frac{\exp(2i\alpha - \pi i/4)}{\pi^{1/2} w} \left[1 + \frac{i}{2w^2} + O(w^{-4}) \right]. \quad (\text{П. 17})$$

Литература

1. О.В. КОНСТАНТИНОВ и В.И. ПЕРЕЛЬ, ЖЭТФ 38, 161 (1960).
2. S. BUCHSBAUM and J. GALT, Phys. Fluids, 4, 1514 (1961).
3. Э.А. КАНЕР и В.Г. СКОБОВ, ЖЭТФ 45, 610 (1963).
4. A.V. RIPPARD, Phil. Mag. 2, 1147 (1957).
5. Э.А. КАНЕР, В.Г. ПЕСЧАНСКИЙ и И.А. ПРИВОРОЦКИЙ, ЖЭТФ 40, 214 (1961).
6. Э.А. КАНЕР, ЖЭТФ 44, 1036 (1963).